

Mehrwertige Logiken

Autor: Fabian Koßmann

Betreuerin: Prof. Dr. Claudia Schon

Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R

- Geschichte und Idee der mehrwertigen Logik
- Bestandteile von m-wertigen Logiken
 - Syntax
 - Semantik
 - Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit, Tautologie, Kalküle
- L_3 -Logik
 - Syntax
 - Semantik
- Erweiterung der L_3 -Logik zur Prädikatenlogik
 - Syntax
 - Semantik
- Vienna Development Specification Language
- Beispiel für die Nutzung der VDM-SL
- Zusammenfassung

Geschichte und Idee der mehrwertigen Logik

- Zunächst eher Philosophisch
 - Welchen Wahrheitswert bekommt eine nicht als wahr oder falsch bestimmbare Aussage?
- Prägende Personen
 - Jan Lukasiewicz
 - S.C. Kleen
 - Emil Post

Bestandteile von m-Wertigen Logiken

- Festlegen der Bezeichner für die Wahrheitswerte
 - Anzahl der Wahrheitswerte $m \leq 2$
 - Menge mit Bezeichner für die m Wahrheitswerte $M = \{0, \dots, m-1\}$
 - Z.B. $M = \{0, 1\}$
- Festlegen der Bezeichner für die Operatoren
 - Festlegen über die Menge F
 - Z.B. $F = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
- Festlegen der Bezeichner für Aussagenlogische Variablen
 - Festlegen über die Menge P
 - Z.B. $P = \{A, B\}$
- Bilden von Formeln
 - Die Menge $Fml(V)$ von Formeln über das Vokabular V wird in der Regel induktiv definiert
- Angeben der Designierten Wahrheitswerte
 - Die Menge der Designierten Wahrheitswerte wird über die Menge D angegeben
 - Designierte Wahrheitswerte sind die Werte die als Wahr angesehen werden
 - Z.B. $D = \{1\}$

- Belegung
 - Eine Belegung η ist eine Funktion, welche jeder Aussagenlogischen Variablen in einer Formel einen Wahrheitswert aus M zuordnet
 - $\eta: P \rightarrow M$
- Festlegen der Bedeutung der Operatoren
 - Jeden Operator $f \in F$ wird eine Funktion f^M zugeordnet
 - $f^M: M^n \rightarrow M$
 - f^M wird häufig über eine Wahrheitstafel festgelegt
 - Das Konstrukt $(M, f^M: f \in F)$ wird auch F-Algebra genannt
- Bewertungsfunktion
 - Es muss eine Bewertungsfunktion η_M definiert werden, die einer beliebigen Formel $t \in \text{Fml}(V)$ einen Wahrheitswert aus M zuordnet.
 - $\eta_M: \text{Fml}(V) \rightarrow M$
 - Der Wahrheitswert $\eta_M(t)$ einer Formel t kann mittels der Belegung η und der zuvor definierte F-Algebra ermittelt werden

- Erfüllbarkeit
 - Eine Formel t ist erfüllbar, wenn es mindestens eine Belegung η gibt so das $\eta_M(t) \in D$
- Unerfüllbarkeit
 - Eine Formel t ist unerfüllbar, wenn es keine Belegung η gibt so gibt so das $\eta_M(t) \in D$
- Tautologie
 - Eine Formel t ist eine Tautologie, wenn für alle Belegungen η gilt das $\eta_M(t) \in D$
- Kalküle
 - Für jede endliche mehrwertige Logik lässt sich ein Tableaunkalkül erstellen
 - Gut automatisierbar

L₃-Logik

- Festlegen der Bezeichner für die Wahrheitswerte
 - $M = \{0, u, 1\}$
- Festlegen der Bezeichner für die Operatoren
 - $F = \{\neg, \sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \subset \Leftrightarrow, \equiv\}$
- Festlegen der Bezeichner für Aussagenlogische Variablen
 - Kommt auf den Anwendungsfall an
- Bilden von Formeln
 - Induktive Definition der Menge $Fml_3(V)$
 - Sei $p \in P$ dann ist p eine Formel
 - Sei $\alpha \in Fml_3(V)$ und $\beta \in Fml_3(V)$ dann sind auch folgendes Elemente aus $Fml_3(V)$: $\neg\alpha, \sim\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \beta, \alpha \subset \beta, \alpha \Leftrightarrow \beta, \alpha \equiv \beta$
- Angeben der Designierten Wahrheitswerte
 - $D = \{1\}$

- Belegung
 - Jeder aussagenlogischen Variable in einer Formel t wird einer der Wahrheitswerte $0, u, 1$ zugeordnet
- Festlegen der Bedeutung der Operatoren über Wahrheitstafeln

p	$\neg p$	p	$\sim p$	$\wedge$	1	u	0	$\vee$	1	u	0
1	0	1	0	1	1	u	0	1	1	1	1
u	u	u	1	u	u	u	0	u	1	u	u
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	u	0

$A \supset B$			
$B \downarrow A \rightarrow$	1	u	0
1	1	1	1
u	u	1	1
0	0	1	1

$A \rightarrow B$	
$B \downarrow A \rightarrow$	1 u 0
1	1 u 1
u	u u 1
0	0 u 1

$A \longleftrightarrow B$	
$B \downarrow A \rightarrow$	1 u 0
1	1 u 0
u	u u u
0	0 u 1

$A \equiv B$	
$B \downarrow A \rightarrow$	1 u 0
1	1 u 0
u	u 1 1
0	0 1 1

- F-Algebra
 - Wurde über die Wahrheitstafeln definiert
- Bewertungsfunktion
 - Ist über die F-Algebra und über die Belegung definiert
- Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit und Tautologie bleibt gleich definiert

Erweiterung der L_3 -Logik zur Prädikatenlogik

- Ziel:
 - Es sollen auch die Prädikatenlogischen Elemente wie Konstanten, Variablen, Prädikate, Quantoren verwendet werden können
- Es müssen Teile der Prädikatenlogik erster Stufe verwendet werden und einige der obigen Elemente aus der L_3 -Logik angepasst werden

- Bekannte Elemente aus der PL1 müssen definiert werden
 - Menge C von Symbolen für Konstanten
 - Menge Fnkt von Symbolen für Funktionen
 - Menge V von Symbolen für Variablen
 - Menge T von Termen

- Festlegen der Bezeichner für die Operatoren
 - $F = \{\neg, \sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \subset \Leftrightarrow, \equiv, \exists, \forall\}$
- Bilden von Formeln
 - Induktive Definition der Menge $Fml_3(V)$
 - Sei $p \in P$ ein Prädikat mit der Stelligkeit n und seien dann $t_1, \dots, t_n$ Terme aus T , dann ist $p(t_1, \dots, t_n)$ eine Formel
 - Sei $\alpha \in Fml_3(V)$ und $\beta \in Fml_3(V)$ dann sind auch folgende Elemente aus $Fml_3(V)$: $\neg\alpha, \sim\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \beta, \alpha \subset \beta, \alpha \Leftrightarrow \beta, \alpha \equiv \beta, \exists\alpha, \forall\alpha$

- Bekannte Elemente aus der PL1 müssen definiert werden
 - Universum
 - Konstantenbelegung
 - Variablenbelegung
 - Funktionsbelegung
 - Die obigen Belegungen zusammen mit dem Universum werden auch als Prästruktur M_0 für das Vokabular V bezeichnet

- Belegung
 - Die Definition für die Belegung bleibt gleich
- Festlegen der Bedeutung der Operatoren
 - Die Bedeutung bleibt gleich, es muss allerdings die Bedeutung des Existenzquantors und des Allquantors festgelegt werden
 - Bedeutung des Allquantors
$$\eta_M(\forall_x a(x)) = 1, \text{ wenn für alle } m \in M_0 \text{ gilt } \eta_M(a(m/x)) = 1$$
$$\eta_M(\forall_x a(x)) = 0, \text{ wenn ein } m \in M_0 \text{ existiert so das gilt } \eta_M(a(m/x)) = 1$$
$$\eta_M(\forall_x a(x)) = u, \text{ sonst}$$
 - Bedeutung des Existenzquantors
$$\eta_M(\exists_x a(x)) = 1, \text{ wenn ein } m \in M_0 \text{ existiert so das gilt } \eta_M(a(m/x)) = 1$$
$$\eta_M(\exists_x a(x)) = 0, \text{ wenn für alle } m \in M_0 \text{ gilt } \eta_M(a(m/x)) = 0$$
$$\eta_M(\exists_x a(x)) = u, \text{ sonst}$$

- F-Algebra
 - Wurde über die Wahrheitstafeln zusammen mit der Bedeutung des Allquantors und des Existenzquantors definiert
- Bewertungsfunktion
 - Die Bewertungsfunktion η_M weist jedem $p \in P$ mit der Stelligkeit n und jedem $m_1, \dots, m_n$ Tupel aus M_0 einen der Wahrheitswerte $1, u, 0$ zu
- L_3 -Struktur
 - $M = \langle M_0, \eta_M \rangle$ nennt man auch L_3 Struktur im Vokabular V
- Folgerung
 - Die Formel A ist eine dreiwertige logische Folgerung aus der Formelmengende S , wenn gilt für alle dreiwertigen Strukturen M zum Vokabular V und für alle $B \in S$ für die gilt $\eta_M(B)=1$ auch gilt $\eta_M(A)=1$
- Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit und Tautologie bleibt gleich definiert

Vienna Development Specification Language

- Methode zur formalen Spezifikation und Entwicklung von Computerprogrammen
- Für die Beschreibung wird eine dreiwertige Logik verwendet

- Universum
 - $\mathbb{N}$ zusammen mit einem Fehlerelement $*\mathbb{N}$
- Menge der Wahrheitswerte

Korrespondenz der Wahrheitswerte der VDM-Logik und der L_3 Logik	
VDM-Logik	L_3 Logik
<i>true</i>	1
$*\mathbb{B}$	<i>u</i>
<i>false</i>	0

- Operatoren

Korrespondenz der Operatoren in der VDM-Logik und der L_3 Logik	
VDM-Logik	L_3 Logik
$\wedge, \vee$	$\wedge, \vee$
$\neg$	$\neg$ starke Negation
$\rightarrow$	$\rightarrow$ starke Implikation
$\longleftrightarrow$	$\longleftrightarrow$ starke Äquivalenz

- Prädikate

- Die Prädikate dienen der Repräsentation von logischen Vergleichen in Programmiersprachen
- Gleichheitsprädikat

$A =_3 B$	$B \in \mathbb{N}$	B hat den Wert $^*\mathbb{N}$
$A \in \mathbb{N}$	$A = B$	$^*\mathbb{B}$
A hat den Wert $^*\mathbb{N}$	$^*\mathbb{B}$	$^*\mathbb{B}$

- Funktionen

- Dienen der Repräsentation von mathematischen Operatoren

$$\left[\frac{n}{m}\right] = \begin{cases} \text{das kleinste } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \cdot m \geq n & \text{falls } m \neq 0 \\ ^*\mathbb{N} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[n - m] = \begin{cases} n - m & \text{falls } n \geq m \\ ^*\mathbb{N} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel für die Nutzung von VDM-SL

$$\forall n, m ([\frac{n}{m}] = [m - n] \rightarrow 5n = 5m^2 - 5nm)$$

- Für $n, m \in \mathbb{N}$ und $m \geq n$ und $m \neq 0$ gilt das die Formel den Wert true oder false hat, je nachdem wie n und m gewählt werden
- Für $n, m \in \mathbb{N}$ und $m < n$ oder $m = 0$ gilt, das die Formel den Wert *B hat

Zusammenfassung

- Geschichte und Idee der mehrwertigen Logik
- Bestandteile einer m-Wertigen Logik
- L_3 -Logik mit Erweiterung auf Prädikatenlogik
- VDM-SL
- Beispiel für die Nutzung von VDM-SL
- Heutige Einsatzgebiete
 - Spezifikation
 - Elektrotechnik
 - Verifikation
 - ...

- Schmitt, P. H.: Nichtklassische Logiken, Juli 2004. Vorlesungsskript, Kapitel: Wiederholung, Seiten: 8-18.
- Schmitt, P. H.: Nichtklassische Logiken, Juli 2004. Vorlesungsskript, Kapitel: Mehrwertige Logiken, Seiten: 19-124.

Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit!

Fragen?

Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R